جامعة البعث / كلية العلوم

الإسم و الرقم الجامعي:

## امتحان مادة ميكانيك (1) لطلاب السنة الثانية / قسم الرياضيات

## الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي 2016 – 2017

**السؤال الأول:** (40 درجة)

1. في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة $OXYZ$، حدد مع الرسم الإحداثيات الأسطوانية لتعيين نقطة $M$ في الفراغ، ثم اكتب عبارة متجه موضع النقطة و استنتج عبارتي السرعة و التسارع للنقطة في هذه الجملة
2. تتحرك نقطة $P$ تحت تأثير القوة $\vec{F} = \lambda\,\vec{r} + \vec{a}$، حيث أن $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\vec{a}$ هو متجه ثابت في الفراغ و $\vec{r}$ هو متجه موضع النقطة $P$، أثبت أن هذه القوة كمونية ثم أوجد خطوط حقل هذه القوة؟

**السؤال الثاني:** (25 درجة)

تتحرك نقطة مادية $P$ في المستوي $XOY$ بحيث تعطى إحداثياتها بالقوانين الزمنية التالية

$$x = \theta Cos(\theta)\ ,\ y = \theta Sin(\theta)\quad ;\quad kt = \theta^3$$

i. أثبت أن حركة النقطة تخضع لقانون السطوح

ii. عين متجهي سرعة و تسارع الحركة

**السؤال الثالث:** (30 درجة)

نابض شاقولي معامل مرونته $k = 400$ معلق من طرفه العلوي في نقطة ثابتة $A$، أما طرفه الحر فهو مستقر في الموضع $O$. نعلق كتلة مقدارها $m = 0.2$ في طرفه الحر، استطال النابض و استقر في الموضع $O'$. فإذا سحبت الكتلة عن موضع توازنها $O'$ مسافة مقدارها $x = 0.01$ باتجاه الأسفل و تركت لتتحرك بدون سرعة ابتدائية ضمن وسط معامل مقاومته لحركة الكتلة $\alpha = 16$.

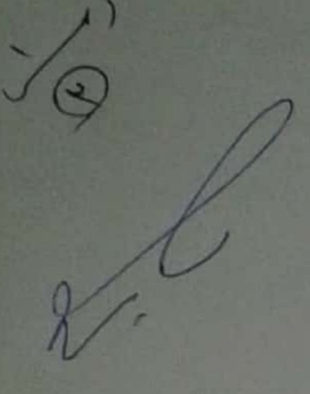
على اعتبار أن تسارع الجاذبية الأرضية هو $g = 10$، المطلوب

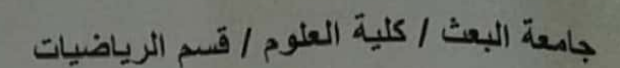
1. احسب $x_0$ مقدار استطالة النابض بعد تعليق الكتلة في طرفه الحر و استقرارها في الموضع $O'$.
2. عين معادلة حركة الكتلة، ثم أوجد القانون الزمني لحركتها

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي

مع أطيب التمنيات بالتوفيق و النجاح



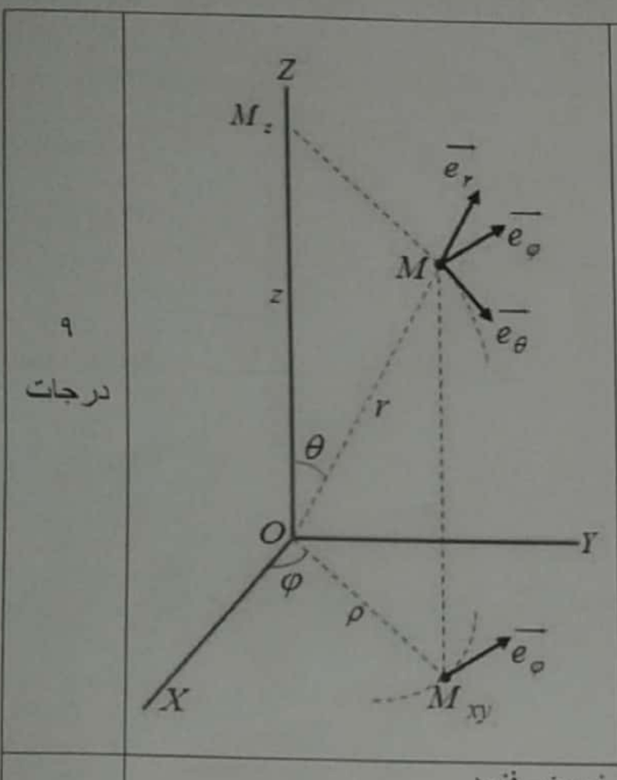


جامعة البعث / كلية العلوم / قسم الرياضيات

سلم تصحيح مادة الميكانيك (١)، لطلاب السنة الثانية / رياضيات

امتحان الفصل الدراسي الثاني للعام الدراسي ٢٠١٦ – ٢٠١٧

**السؤال الأول:** (٢٠ + ٢٠ = ٤٠ درجة)

| | | |
|---|---|---|
| ١. تعرف الإحداثيات الأسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات التالية<br>$\begin{cases}\rho = \left\Vert \overline{OM_{xy}} \right\Vert \\ \varphi = \left(\overline{OX}, OM_{xy}\right) \\ z = \left\Vert \overline{OM_z} \right\Vert\end{cases}$<br>و نضع $M(\rho,\varphi,z)$.<br>كما أن متجه الموضع $\overline{OM}$ يعطى في هذه الإحداثيات بالشكل<br>$\overline{OM} = \rho \overline{e_\rho} + z\,\overline{e_z}$<br>و بما أن<br>$\dot{\overline{e_\rho}} = \dot\varphi\,\overline{e_\varphi} \quad , \quad \dot{\overline{e_\varphi}} = -\dot\varphi\,\overline{e_\rho} \quad , \quad \dot{\overline{e_z}} = \bar{0}$<br>نجد أن |  | ٩<br>درجات |
| لإيجاد عبارة السرعة في الإحداثيات الأسطوانية نشتق متجه الموضع و نعوض فنجد<br>$\overline{V} = \frac{d}{dt}\overline{OM} = \frac{d}{dt}\left(\rho\overline{e_\rho} + z\,\overline{e_z}\right) = \dot\rho\,\overline{e_\rho} + \rho\,\dot{\overline{e_\rho}} + \dot z\,\overline{e_z} + z\,\dot{\overline{e_z}} \quad \Rightarrow$<br>$\overline{V} = \dot\rho\,\overline{e_\rho} + \rho\,\dot\varphi\,\overline{e_\varphi} + \dot z\,\overline{e_z}$ | | ٦<br>درجات |
| لإيجاد عبارة التسارع في الإحداثيات الأسطوانية نشتق متجه السرعة و نعوض فنجد<br>$\overline{\Gamma} = \frac{d}{dt}\overline{V} = \frac{d}{dt}\left(\dot\rho\,\overline{e_\rho} + \rho\,\dot\varphi\,\overline{e_\varphi} + \dot z\,\overline{e_z}\right)$<br>$= \ddot\rho\,\overline{e_\rho} + \dot\rho\dot\varphi\,\overline{e_\varphi} + \rho\,\ddot\varphi\,\overline{e_\varphi} + \ddot z\,\overline{e_z} + \dot\rho\,\dot{\overline{e_\rho}} + \rho\,\dot\varphi\,\dot{\overline{e_\varphi}} + \dot z\,\dot{\overline{e_z}}$<br>$= \ddot\rho\,\overline{e_\rho} + \dot\rho\dot\varphi\,\overline{e_\varphi} + \rho\,\ddot\varphi\,\overline{e_\varphi} + \ddot z\,\overline{e_z} + \dot\rho\,\dot\varphi\,\overline{e_\varphi} - \rho\,\dot\varphi^2\,\overline{e_\rho} \quad \Rightarrow$<br>$\overline{\Gamma} = \left(\ddot\rho - \rho\,\dot\varphi^2\right)\overline{e_\rho} + \left(\rho\,\ddot\varphi + 2\dot\rho\,\dot\varphi\right)\overline{e_\varphi} + \ddot z\,\overline{e_z}$ | | ٥<br>درجات |

<table>
<tr>
<td>٩<br>درجات</td>
<td>

٢. في حال وجود تابع القوى (أو تابع الكمون) للحقل فإن

$$dU = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\lambda\,\vec{r} + \vec{a}\right)\cdot d\vec{r} = d\left(\frac{\lambda}{2}\,\vec{r}^{\,2} + \vec{a}\cdot\vec{r}\right) = d\left(\frac{\lambda}{2}r^2 + \vec{a}\cdot\vec{r}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{\lambda}{2}r^2 + \vec{a}\cdot\vec{r} + C}$$

حيث أن $C$ هو ثابت يتم تعيينه من شروط كمون الحقل، وبالتالي فإن القوة المعطاة هي قوة كمونية.

</td>
</tr>
<tr>
<td>٦<br>درجات</td>
<td>

و بما أن $\vec{r} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$ و بفرض أن $\vec{a} = a_x\ \vec{i} + a_y\ \vec{j} + a_z\ \vec{k}$، فإن

$$\vec{F} = \left(\lambda x + a_x\right)\vec{i} + \left(\lambda y + a_y\right)\vec{j} + \left(\lambda z + a_z\right)\vec{k}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>٥<br>درجات</td>
<td>

و بالتالي فإن خطوط القوى تعطى بالمعادلات التفاضلية

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \Rightarrow \frac{dx}{\lambda x + a_x} = \frac{dy}{\lambda y + a_y} = \frac{dz}{\lambda z + a_z} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{\lambda x + a_x} = \dfrac{dy}{\lambda y + a_y} \\ \dfrac{dy}{\lambda y + a_y} = \dfrac{dz}{\lambda z + a_z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda dy}{\lambda y + a_y} - \dfrac{\lambda dx}{\lambda x + a_x} = 0 \\ \dfrac{\lambda dz}{\lambda z + a_z} - \dfrac{\lambda dy}{\lambda y + a_y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ln\left(\dfrac{\lambda y + a_y}{\lambda x + a_x}\right) = Ln(A) \\ Ln\left(\dfrac{\lambda z + a_z}{\lambda y + a_y}\right) = Ln(B) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda y + a_y = A\left(\lambda x + a_x\right) \\ \lambda z + a_z = B\left(\lambda y + a_y\right) \end{array}}$$

و هي معادلات خطوط قوى الحقل المعطى حيث أن $A$ و $B$ هما ثابتان اختياريات.

</td>
</tr>
</table>

**السؤال الثاني:** (٢٥ درجة)

<table>
<tr><td>١٠ درجات</td><td>

نلاحظ أن

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt} = (Cos\theta - \theta\ Sin\theta)\left(\dfrac{k}{3\theta^2}\right) = k\,\dfrac{Cos\theta - \theta\ Sin\theta}{3\theta^2} \\ \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dt} = (Sin\theta + \theta\ Cos\theta)\left(\dfrac{k}{3\theta^2}\right) = k\,\dfrac{Sin\theta + \theta\ Cos\theta}{3\theta^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x\,\dot{y} - y\,\dot{x} = (\theta\ Cos\theta)k\,\frac{Sin\theta + \theta\ Cos\theta}{3\theta^2} - (\theta\ Sin\theta)k\,\frac{Cos\theta - \theta\ Sin\theta}{3\theta^2} \Rightarrow$$

$$x\,\dot{y} - y\,\dot{x} = \frac{k}{3}\left(Cos^2\theta + Sin^2\theta\right) = \frac{k}{3} = C$$

و بالتالي فإن حركة النقطة المعطاة خاضعة لقانون السطوح.

</td></tr>
<tr><td>٨ درجات</td><td>

نوجد أولاً الوسيطين $\rho$ و $\varphi$ كما يلي

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\theta\ Cos\theta)^2 + (\theta\ Sin\theta)^2} = \theta \\ \varphi = ArcTan\left(\dfrac{y}{x}\right) = ArcTan\left(\dfrac{\theta\ Sin\theta}{\theta\ Cos\theta}\right) = ArcTan(Tan\theta) = \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad u'_{\varphi} = -\frac{1}{\varphi^2} \quad \& \quad u''_{\varphi} = \frac{2}{\varphi^3}$$

</td></tr>
<tr><td>٧ درجات</td><td>

لإيجاد سرعة و تسارع الحركة نستخدم دستورا بينييه الأول و الثاني لنجد أن

$$\overrightarrow{V} = C\left(-\frac{du}{d\varphi}\overrightarrow{e_\rho} + u\,\overrightarrow{e_\varphi}\right) = \frac{k}{3}\left[-\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)\overrightarrow{e_\rho} + \left(\frac{1}{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\varphi}\right] = \frac{k}{3\varphi}\left[\frac{1}{\varphi}\overrightarrow{e_\rho} + \overrightarrow{e_\varphi}\right]$$

$$\overrightarrow{\Gamma} = -C^2u^2\left(u''_{\varphi} + u\right)\overrightarrow{e_\rho} = -\frac{k^2}{9}\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)\left(\frac{2}{\varphi^3} + \frac{1}{\varphi}\right)\overrightarrow{e_\rho} = -\frac{k^2}{9\,\varphi^5}\left(2 + \varphi^2\right)\overrightarrow{e_\rho}$$

</td></tr>
</table>

**السؤال الثالث:** (٣٥ درجة)

| | | |
|---|---|---|
| إن حركة الكتلة هي حركة مستقيمة تتم على المحور الشاقولي المار بنقطة تعليق النابض، لذلك نعتبر $O$ (موضع توازن النابض قبل تعليق الكتلة) مركزاً للإحداثيات و محور الحركة المحور الشاقولي الهابط $OX$ و نستخدم الإحداثي $x$ للكتلة كوسيط للحركة. | | ٥ درجات |
| لإيجاد مقدار استطالة النابض بعد تعليق الكتلة و استقرارها في الموضع $O'$، نطبق مبدأ التوازن على اعتبار أن الكتلة متوازنة في هذا الموضع.<br>تؤثر على الكتلة في حال التوازن قوة ثقلها $\overline{F_1} = m\ g\ \overline{e_x} = 2\,\overline{e_x}$ و قوة مرونة النابض $\overline{F_2} = -\mu\, x_{O'}\, \overline{e_x} = -400\ a_0\ \overline{e_x}$. و بتطبيق المبدأ العام في التوازن نجد أن $\overline{F_1} + \overline{F_2} = \overline{0}$ و بالإسقاط على المحور $OX$ نجد أن<br>$$2 - 400\ a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0.005$$ | في حال التوازن<br>$O$<br>$F_2 = -\mu x$<br>$O'$<br>$F_1 = mg$<br>$X$ | ١٠ درجات |
| تؤثر على الكتلة في حال حركتها ضمن السائل كما هو موضح في الشكل المجاور قوة ثقلها $\overline{F_1} = m\ g\ \overline{e_x} = 2\,\overline{e_x}$ و قوة مرونة النابض $\overline{F_2} = -\mu\ x\ \overline{i} = -400\ x\ \overline{i}$ و قوة مقاومة الوسط (السائل) لحركة الكتلة $\overline{T} = -16\ \dot{x}\ \overline{i}$. | | ٦ درجات |
| بتطبيق المبدأ الأساسي في التحريك على حركة الكتلة نجد أن<br>$$\overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{T} = m\ \overline{\Gamma}$$<br>و بالإسقاط على محور الحركة $OX$، نجد أن<br>$$OX\ :\ 2 - 400\ x - 16\ \dot{x} = 0.2\ \ddot{x}$$<br>و التي يمكن كتابتها بالشكل<br>(*) $$\boxed{\ddot{x} + 80\ \dot{x} + 2000\ x = 10}$$<br>و هي معادلة حركة الكتلة، حيث نلاحظ أنها معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة. | في حال الحركة<br>$O$<br>$F_2 = -\mu x$<br>$T = -\alpha \dot{x}$<br>$F_1 = m\ g$<br>$X$ | ٦ درجات |
| لحل المعادلة (*) و استنتاج قانون الحركة نحل أولاً المعادلة المتجانسة الموافقة<br>(**) $$\ddot{x} + 80\ \dot{x} + 2000\ x = 0$$ | | |

| | |
|---|---|
| حيث نكتب أولاً المعادلة المميزة و هي<br>$$\lambda^2 + 80\,\lambda + 2000 = 0$$<br>و بحل هذه المعادلة نجد الحلين المركبين $\lambda_{1,2} = -40 \mp 20\,i$ . و تكون عبارة الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة (**) بالشكل<br>$$x = \left[c_1\,Sin\left(20\,t\right) + c_2\,Cos\left(20\,t\right)\right]e^{-40\,t}$$<br>و بملاحظة أن $x = 0.005$ هو حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (*)، يصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة (*) بالشكل<br>$$x = \left[c_1\,Sin\left(20\,t\right) + c_2\,Cos\left(20\,t\right)\right]e^{-40\,t} + 0.005$$<br>و لتعيين القانون الزمني لحركة الكتلة نعوض شروط البدء $x_0 = a_0 + a = 0.015$ و $\dot{x}_0 = 0$ فنجد أن<br>$$\begin{cases} c_2 + 0.005 = 0.015 \\ 20\,c_1 - 40\,c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0.01 \\ c_1 = 2\,c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0.01 \\ c_1 = 0.02 \end{cases}$$<br>و يصبح القانون الزمني لحركة الكتلة بالشكل<br>$$\boxed{x - 0.005 = \left[0.02\,Sin\left(20\,t\right) + 0.01\,Cos\left(20\,t\right)\right]e^{-40\,t}}$$<br>(+) | ٨<br>درجات |

........................انتهى السلم (خمس صفحات)........................

مدرس المقرر: الدكتور محمد العلي